Schattingen van parameters in de gamma-verdeling en een onderzoek naar de kwaliteit van een drietal schattingsmethoden met behulp van Monte Carlo-methoden

Heuts, R.M.J.

Publication date:
1971

EIT
27

R. M. J. Heuts

Schattingen van parameters in de gamma-verdeling en een onderzoek naar de kwaliteit van een drietal schattingsmethoden met behulp van Monte Carlo-methoden

Research memorandum

R 41

T Estimation

katholieke hogeschool

ECONOMISCH INSTITUUT TILBURG
ECONOMETRISCHE AFDELING

Schattingen van parameters in de gamma-verdeling
en een onderzoek naar de kwaliteit van een drie-
tal schattingsmethoden m.b.v. Monte Carlo-methoden.

R.M.J. Heuts.

Schattingen van parameters in de gamma-verdeling en een onderzoek naar de kwaliteit van een drietal schattingsmethoden m.b.v. Monte Carlo-methoden.*

Het is bij veel statistisch werk gebruikelijk, een gegeven waarnemingsreeks te interpreteren als een serie aselecte en onafhankelijke trekkingen uit een onbekende kansverdeling. Als men de aard (analytische vorm) van deze verdeling heeft vastgelegd, zal men proberen de parameters uit de waarnemingsreeks te schatten. De hierbij in het geval van een gamma-verdeling gebruikte technieken, kan men indelen in momentenmethode, benaderingsmethode voor de meest aannemelijke schatters en een meer uitgebreide methode van meest aannemelijke schatters.

Stel we hebben de volgende gamma-verdeling:

$$(1)\quad f(x;\ \beta\ ,\delta) = \frac{1}{\beta^{\delta}\ \Gamma\ (\delta)}\ e^{\frac{-x}{\beta}}\ x^{\delta-1}\ (x \geq 0,\ \beta \geq 0,\ \delta \geq 0)$$

De bij deze functie behorende momenten-genererende functie is:

$$(2)\quad E\,(e^{\Theta\ \underline{x}}) = \frac{1}{\beta^{\delta}\ \Gamma\ (\delta)} \int_{0}^{\infty} e^{\Theta t}\ e^{\frac{-t}{\beta}}\ t^{\delta-1}\ dt = (1 - \beta\Theta)^{-\delta}$$

Door reeksontwikkeling vindt men dat:

$$(3)\quad \mu_r^1 = E(\underline{x}^r) = \frac{\beta^r \Gamma\ (\delta + r)}{\Gamma\ (\delta)}$$

Dus:

$$\mu_1^1 = \beta\ \ \delta$$

$$\mu_2^1 = \beta^2\ (\delta+1)\ \delta$$

$$\mu_3^1 = \beta^3\ (\delta+2)\ (\delta+1)\ \delta$$

$$\mu_4^1 = \beta^4\ (\delta+3)\ (\delta+2)\ (\delta+1)\ \delta$$

(*) De schrijver bedankt Dr. W. Molenaar, die het manuscript heeft willen doorlezen en wiens kritische opmerkingen tot verschillende verbeteringen hebben geleid. Voor de programmering van de Monte Carlo-studie ben ik de heer M. Geleyns zeer erkentelijk.

De momenten rond het gemiddelde worden dan:

(4) $\mu_2 = \mu_2^1 - (\mu_1^1)^2 = \delta\ \beta^2$

$$\mu_3 = \mu_3^1 - 3\ \mu_2^1\ \mu_1^1 + 2\ (\mu_1^1)^3 = 2\ \beta^3\ \delta$$

$$\mu_4 = \mu_4^1 - 4\ \mu_3^1\ \mu_1^1 + 6\ \mu_2^1\ (\mu_1^1)^2 - 3\ (\mu_1^1)^4 = 3\ \beta^4\ \delta\ (\delta+2)$$

A. <u>De momentenschattingsmethode van Karl Pearson</u>.

Door de eerste twee momenten van de verdeling met dichtheid (1) gelijk te stellen aan die van de steekproef, krijgt men een stelsel van 2 vergelijkingen met 2 onbekenden.

$\bar{\underline{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1} \underline{x}_i$ als schatting voor $E(\underline{x}) = \beta\ \delta$

(5)
$\underline{s}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1} (\underline{x}_i - \bar{\underline{x}})^2$ als schatting voor $\sigma^2\ (\underline{x}) = \delta\ \beta^2$

(6)
$$\hat{\underline{\beta}}_1 = \frac{\underline{s}^2}{\bar{\underline{x}}} \qquad \hat{\underline{\delta}}_1 = \frac{\bar{\underline{x}}^2}{\underline{s}^2}$$

B. Benaderingsmethode voor de meest aannemelijke schatters.

De aannemelijkheidsfunctie voor een steekproef $x_1,\dots x_n$ uit een kansdichtheid weergegeven door formule (1) is:

$$(7)\quad L(\beta,\delta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\beta,\delta)=\beta^{-n\delta}\,(\Gamma(\delta))^{-n}\,e^{-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\beta}}\prod_{i=1}^{n} x_i^{\delta-1}$$

$$(8)\quad \ln L(\beta,\delta)=-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{\beta}-n\,\delta\ln\beta-n\ln\Gamma(\delta)+(\delta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

De aannemelijkheidsvergelijkingen zijn nu:

$$\frac{\partial\ln L(\beta,\delta)}{\partial\beta}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\beta^2}-\frac{n\,\delta}{\beta}=0$$

(9)

$$\frac{\partial\ln L(\beta,\delta)}{\partial\delta}=-n\ln\beta-n\,\frac{d\ln\Gamma(\delta)}{d\delta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0$$

De meest aannemelijke schatters voor onafhankelijke trekkingen uit (1) voldoen dus aan:

$$\hat{\underline{\beta}}_2=\frac{\bar{\underline{x}}}{\hat{\underline{\delta}}_2}$$

(10)

$$\ln\hat{\underline{\delta}}_2-\frac{\Gamma'(\hat{\underline{\delta}}_2)}{\Gamma(\hat{\underline{\delta}}_2)}=\ln\bar{x}-\sum_{i=1}\frac{\ln x_i}{n}$$

Een benadering ontstaat door de reeksontwikkeling van

$$(11)\quad \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}=\ln t-\frac{1}{2t}+\dots\dots$$ te gebruiken.

Hiervan worden nu alleen de eerste twee termen gebruikt.
Dit geeft als schatters voor δ en β:

$$\underline{\hat{\delta}}_2 = \frac{1}{2\left(\ln \underline{\bar{x}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \underline{x}_i\right)}$$

(12)

$$\underline{\hat{\beta}}_2 = \frac{\underline{\bar{x}}}{\underline{\hat{\delta}}_2}$$

C. Een meer uitgebreide benadering van de meest aannemelijke schatters.

Uit het vergelijkingenstelsel (10) kan $\underline{\hat{\delta}}$ ook opgelost worden met behulp van tabellen voor de functie $\ln t - \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$. [1]

De getabelleerde functie $\ln t - \frac{\Gamma'(t)}{\Gamma(t)}$ heeft als nadeel dat interpolatie in deze functie moeilijk is.
J. Greenwood en D. Durand [2] berekenen daarom:

$$\hat{\delta}\left[\ln \hat{\delta} - \frac{d \ln \hat{\delta}}{d \hat{\delta}}\right] \text{ als functie van } \ln \hat{\delta} - \frac{d \ln \Gamma(\hat{\delta})}{d \hat{\delta}}$$

Door Greenwood en Durand is ook voor $\ln \hat{\delta} - \frac{d \ln \Gamma(\hat{\delta})}{d \hat{\delta}}$

de inverse functie benaderd door gebruik te maken van de asymptotische eigenschappen van $\frac{d \ln \Gamma(\hat{\delta})}{d \hat{\delta}}$

$$\underline{\hat{\delta}}_3 = \frac{8{,}898919 + 9{,}05995\, \underline{y} + 0{,}9775373\, \underline{y}^2}{\underline{y}\,[17{,}79728 + 11{,}968477\, \underline{y} + \underline{y}^2]} \quad \text{als } \underline{y} > 0{,}5772$$

(13)

$$\underline{\hat{\delta}}_3 = \frac{0{,}5000876 + 0{,}1648852\, \underline{y} - 0{,}544274\, \underline{y}^2}{\underline{y}} \quad \text{als } \underline{y} \leq 0{,}5772$$

waarbij: $\underline{y} = \ln \bar{\underline{x}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \underline{x}_i$

Dr. J Oosterhoff* heeft deze inverse functie nog beter benaderd door het gedrag van deze functie te bekijken op nog kleinere intervallen.

(14)

$$\hat{\delta}_3 = \frac{1}{\underline{y}} \left\{ 1 - \frac{\ln \underline{y} - p}{\underline{y}} + \frac{(\ln \underline{y} - p)(\ln \underline{y} - p - 1)}{\underline{y}^2} - 2\,\frac{(\ln \underline{y} - p)\,(\ln \underline{y} - p)^2 - 0{,}65}{\underline{y}^3} \right\} \quad \text{als } \underline{y} > 17$$

$$\hat{\delta}_3 = \frac{8{,}898919 + 9{,}05995\,\underline{y} + 0{,}9775373\,\underline{y}^2}{\underline{y}\,(17{,}79728 + 11{,}968477\,\underline{y} + \underline{y}^2)} \quad \text{als } 0{,}5772 < \underline{y} \leq 17$$

$$\hat{\delta}_3 = \frac{0{,}50076445 + 0{,}16132535\,\underline{y} - 0{,}05014438\,\underline{y}^2}{\underline{y}} \quad \text{als } 0{,}232 < \underline{y} \leq 0{,}5772$$

$$\hat{\delta}_3 = \frac{3 + (9 + 12\,\underline{y})^{\frac{1}{2}} - 0{,}7\,\underline{y}^3 + 0{,}5\,\underline{y}^2}{12\,\underline{y}} \quad \text{als } \underline{y} \leq 0{,}232$$

waarin:

$p = 0{,}577215\,665$ (Constante van Euler)

$\underline{y} = \ln \bar{\underline{x}} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln \underline{x}_i$

De formules (10) en (14) geven dus een numerieke oplossing voor de aannemelijkheidsvergelijkingen.

* Mathematisch Centrum, Amsterdam.

Simulatie ter bepalingen van de kwaliteit van de **drie** schattingsmethoden.

Er worden trekkingen gedaan uit een Erlang-verdeling (dit is een gamma-verdeling waarbij de waarde van δ een positief geheel getal is) van de volgende vorm:

$$(15)\quad f(x;\,\beta,\delta) = \frac{1}{\beta^{\delta}\,\Gamma(\delta)}\; e^{-\frac{x}{\beta}}\; x^{\delta-1} \qquad (\delta \text{ geheeltallig} > 0)\quad \beta > 0$$

waarvan de parameters van te voren zijn gespecificeerd.
Stel dat $\underline{x}$ homogeen verdeeld is op het interval (0.1) dan is $\underline{y} = y(\underline{x}) = -\beta \ln \underline{x}$ een trekking uit een exponentiële verdeling met kansdichtheid $\frac{1}{\beta}\; e^{-y/\beta}$ $(0 \leq y < \infty)$
Door nu een trekking te doen uit een homogene verdeling kan via de boven aangegeven transformatie een trekking uit een exponentiële verdeling verkregen worden; terwijl de som van δ onafhankelijke trekkingen uit een exponentiële verdeling een trekking uit een Erlang-verdeling van het type (15) oplevert.
De gevolge procedure was deze:
Trek 200 keer een steekproef ter grootte van n = 20,40,60 of 80 uit de Erlang-verdeling bij bepaalde parameterwaarden voor β en δ.
Bij iedere getrokken steekproef ter grootte van n worden β en δ geschat volgens de drie schattingsmethoden.
We krijgen dan 200 schattingen voor β en δ voor ieder van de drie schattingsmethoden bij gegeven β,δ en n.
Vervolgens hebben we de onnauwkeurigheid van de schatters berekend:

$$s\,(\hat{\underline{\beta}}_i) = \sqrt{\sum_{j=1}^{200} \frac{(\hat{\underline{\beta}}_{ij} - \beta)^2}{200}} \qquad (i = 1,2,3)$$

$$(16)\qquad s\,(\hat{\underline{\delta}}_i) = \sqrt{\sum_{j=1}^{200} \frac{(\hat{\underline{\delta}}_{ij} - \delta)^2}{200}} \qquad (i = 1,2,3)$$

waarbij β en δ de werkelijke populatie - parameters zijn en de index i = 1,2,3 aangeeft welke schattingsmethode is toegepast.

$i = 1$: momentenmethode

$i = 2$: benaderingsmethode voor de meest aannemelijke schatters

$i = 3$: uitgebreide benadering van de meest aannemelijke schatters (m.b.v. inverse functie)

In tabel I staan de simulatie - resultaten vermeld van de onnauwkeurigheden van de schatters.

Hieruit blijkt dat voor de onderzochte gevallen de momentenmethode onnauwkeuriger is dan de twee anderen methoden. Voor wat betreft de vergelijking tussen methode 2 en 3 is moeilijk een oordeel te vellen, omdat $\hat{\beta}_2$ onnauwkeuriger is dan $\hat{\beta}_3$ maar $\hat{\delta}_2$ over het algemeen nauwkeuriger is dan $\hat{\delta}_3$

In een later stadium van het onderzoek is de logaritme van de aannemelijkheidsfunctie berekend voor de werkelijke en geschatte woorden van β en δ, om zodoende te zien hoe vaak de derde methode (de vrijwel exacte aannemelijkheidsschatting) een maximum geeft voor ln L.

Dit is gedaan om de exactheid van de derde methode te vergelijken met die van de andere m.b.v. het aannemelijksheidscritirium.

Het bleek dat de derde schattingsmethode voor de volgende gegvens:

$\beta = 1$	$\delta = 1$	$n = 20$ of 80
$\beta = 0{,}20$	$\delta = 2$	$n = 20$ of 80
$\beta = 0{,}50$	$\delta = 2$	$n = 20$ of 80
$\beta = 1{,}50$	$\delta = 2$	$n = 20$ of 80
$\beta = 0{,}20$	$\delta = 3$	$n = 20$ of 80
$\beta = 0{,}33$	$\delta = 3$	$n = 20$ of 80
$\beta = 1{,}5$	$\delta = 3$	$n = 20$ of 80
$\beta = 2$	$\delta = 3$	$n = 20$ of 80

in minstens 99% van de gevallen een maximum van ln L opleverde.

In tabel II is alleen het geval $\beta = 1$, $\delta = 1$ en $n = 20$ weergegeven om typografische redenen.

Ter vergelijking van de aanpassing hebben wij χ^2 - toetsen overwogen. Hierbij doen zich evenwel enkele moeilijkheden voor:

1) Bij gebruikmaking van de Mann - Wald techniek (zie Statistische Notitie Nr.5) zijn de klasse - grenzen afhankelijk van de geschatte parameters, waardoor de berekende χ^2 - waarden moeilijk vergelijkbaar zijn.
2) Verder hebben Chernoff en Lehmann [3] bij gebruikmaking van van $\underline{x} = (\underline{x}_1, ---- \underline{x}_n)$ en niet van de klasse - aantallen $\underline{n} = (\underline{n}_1, ---- \underline{n}_k)$, bewezen dat de grootheid $\hat{\underline{X}}^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{[\underline{n}_i - Np_i(\hat{\underline{\theta}})]^2}{Np_i(\hat{\underline{\theta}})}$

bij vaste klassegrenzen asymptotische verdeeld is als:

$$\underline{z} = \chi^2_{k-1-r} + \lambda_1 \underline{y}_1^2 + \lambda_2 \underline{y}_2^2 --- \lambda_r \underline{y}_r^2$$

waarbij $0 < \lambda_1, --- \lambda_r < 1$ en $\underline{y}_1, --- \underline{y}_n$ standaard normale stochastische variabelen zijn, onderling onafhankelijk en onafhankelijk van χ^2_{k-1-r}.

De bepaling van $\lambda_1 --- \lambda_r$ en de verdeling van $\underline{z}$ zijn evenwel moeilijk [4].

In deze laatste paragraaf zullen de asymptotische varianties van de momentenschattingen en meest aannemelijke schattingen worden vergeleken met de varianties verkregen via simulatie bij een steekproef ter grootte van n = 80.

De asymptotische variantie van de momentenschatters.

Bij grote steekproeven geldt bij benadering (Zie Appendix I):

$$\mathrm{VAR}(\hat{\underline{\beta}}_1) \simeq \left(\frac{1}{\underline{\bar{x}}}\right)^2 \Bigg|_{\bar{x} = E(\bar{x})} \mathrm{VAR}(\underline{s}^2) + \left(\frac{-s^2}{\bar{x}^2}\right)^2 \Bigg|_{\substack{\bar{x} = E(\bar{x}) \\ s^2 = E(s^2)}} \mathrm{VAR}(\underline{\bar{x}}) + 2\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)\left(-\frac{s^2}{\bar{x}^2}\right) \Bigg|_{\substack{\bar{x} = E(\bar{x}) \\ s^2 = E(s^2)}} \mathrm{COV}(\underline{s}^2, \underline{\bar{x}})$$

(17)

$$\mathrm{VAR}(\hat{\underline{\alpha}}_1) \simeq \left(\frac{2\bar{x}}{s^2}\right)^2 \Bigg|_{\substack{\bar{x} = E(\bar{x}) \\ s^2 = E(s^2)}} \mathrm{VAR}(\underline{\bar{x}}) + \left(\frac{-\bar{x}^2}{s^4}\right)^2 \Bigg|_{\substack{\bar{x} = E(\bar{x}) \\ s^2 = E(s^2)}} \mathrm{VAR}(\underline{s}^2) + 2\left(\frac{2\bar{x}}{s^2}\right)\left(\frac{-\bar{x}^2}{s^4}\right) \Bigg|_{\substack{\bar{x} = E(\bar{x}) \\ s^2 = E(s^2)}} \mathrm{COV}(\underline{\bar{x}}, \underline{s}^2)$$

Nu is (Zie M.G. Kendall: ,,The Advanced Theory of Statistics", deel I, blz. 230):

$$E(\bar{x}) = E(m_1') = \mu_1' = \beta\,\delta$$

$$s^2) = E(m_2) = \mu_2 = \beta^2\delta$$

$$\text{VAR}(\bar{x}) = \text{VAR}(m_1') = \frac{\mu_2}{n} = \frac{\beta^2\delta}{n}$$

$$(18)\qquad \text{VAR}(s^2) = \text{VAR}(m_2) = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{n} = \frac{2\beta^4\delta^2 + 6\,\beta^4\delta}{n}$$

$$\text{COV}(\bar{x}, s^2) = \text{COV}(m_1', m_2) = \frac{\mu_3}{n} = \frac{2\beta^3\delta}{n}$$

Formule (17) wordt nu:

$$\text{VAR}(\hat{\beta}_1) \simeq \frac{\beta^2}{n}\left(2 + \frac{3}{\delta}\right)$$

$$(19)\qquad \text{VAR}(\hat{\delta}_1) \simeq \frac{2\,\delta}{n}(\delta + 1)$$

De asymptotische covariantie - matrix van de aannemelijkheidsschatters.

Men kan bewijzen [5] dat de asymptotische covariantie matrix van de meest aannemelijke schatters als volgt is:

$$(20)\qquad V = \begin{pmatrix} E\left(\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta^2}\right) & -E\left(\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\delta}\right) \\[2ex] -E\left(\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\delta\partial\beta}\right) & -E\left(\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial\delta^2}\right) \end{pmatrix}^{-1}$$

Nu is:

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta^2}\right) = -\frac{n\,\delta}{\beta^2}$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\beta\partial\delta}\right) = -\frac{n}{\beta}$$

$$E\left(\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\delta^2}\right) = -n\,\frac{d^2 \ln\Gamma(\delta)}{d\,\delta^2}$$

Zodoende vinden we:

$$(21)\quad V = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \frac{\delta}{\beta^2} & \frac{1}{\beta} \\ \frac{1}{\beta} & \frac{d^2 \ln\Gamma(\delta)}{d\,\delta^2} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{n}\begin{pmatrix} \frac{\beta^2}{\delta} - \frac{\beta^2 V}{\delta^2} & \frac{\beta\, V}{\delta} \\ \frac{\beta\, V}{\delta} & -V \end{pmatrix}$$

$$\text{waarbij } V = \frac{1}{\frac{1}{\delta} - \frac{d^2 \ln\Gamma(\delta)}{d\,\delta^2}}$$

Het resultaat is nu als volgt:

$$\mathrm{VAR}\,(\hat{\beta}_3) = \frac{\beta^2}{n}\left\{\frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta^2}\left(\frac{1}{\frac{1}{\delta} - \frac{d^2 \ln\Gamma(\delta)}{d\,\delta^2}}\right)\right\}$$

$$(22)\quad \mathrm{VAR}\,(\hat{\delta}_3) = -\frac{1}{n}\left\{\frac{1}{\frac{1}{\delta} - \frac{d^2 \ln\Gamma(\delta)}{d\,\delta^2}}\right\}$$

$$\mathrm{COV}\,(\hat{\beta}_3\,,\ \hat{\delta}_3) = \frac{\beta}{n\,\delta}\left\{\frac{1}{\frac{1}{\delta} - \frac{d^2 \ln\Gamma(\delta)}{d\,\delta^2}}\right\}$$

De functie $\frac{1}{\frac{1}{\delta} - \frac{d^2 \ln\Gamma(\delta)}{d\,\delta^2}}$ is getabelleerd door M. Masuyama en Y. Kuroiwa [6]. De trigammafunctie $\frac{d^2 \ln\Gamma(\delta)}{d\,\delta^2}$ is ook te vinden bij M. Abramowitz in I.A. Stegun [7].

We zullen de asymptotische varianties van de schatters in formule (19) en (22) vergelijken met de simulatie - resultaten van de variantie bij een steekproef ter grootte van 80, om zodoende te zien of er bij een dergelijke steekproefgrootte aanzienlijke verschillen bestaan tussen de varianties van de schatters berekend volgens de asymptotische formules en die, die via simulatie verkregen zijn. Voor de simulatie - resultaten wordt verwezen naar tabel III.

Overzicht van de verkregen resultaten:

	Asymptotische varianties van de momentenschatters		varianties van de momentenschatters verkregen via simulatie ($n = 80$)	
	VAR ($\hat{\beta}_1$)	VAR ($\hat{\delta}_1$)	VAR ($\hat{\beta}_1$)	VAR ($\hat{\delta}_1$)
$\beta = 1$ $\delta = 1$	0,0625	0,0500	0,0540	0,04[illegible]4
$\beta = 1$ $\delta = 2$	0,0434	0,1500	0,0456	0,1612
$\beta = 1$ $\delta = 3$	0,0375	0,3000	0,0331	0,2858
$\beta = 1$ $\delta = 4$	0,0344	0,5000	0,0348	0,4513
$\beta = 1$ $\delta = 5$	0,0325	0,7500	0,0303	0,6582
$\beta = 0,20$ $\delta = 2$	0,0018	0,1500	0,0021	0,1873
$\beta = 0,20$ $\delta = 3$	0,0015	0,3000	0,0013	0,2514
$\beta = 0,50$ $\delta = 2$	0,0109	0,1500	0,0094	0,1638
$\beta = 0,33$ $\delta = 3$	0,0041	0,3000	0,0040	0,3547

	Asymptotische varianties van de meest aannemelijke schatters		Varianties van de meest aannemelijke schatters verkregen via simulatie (n = 80)	
	VAR ($\underset{\sim}{\hat{\beta}}$)	VAR ($\underset{\sim}{\hat{\delta}}$)	VAR ($\underset{\sim}{\hat{\beta}}$)	VAR ($\underset{\sim}{\hat{\delta}}$)
$\beta = 1$ $\delta = 1$	0,0318	0,0193	0,0318	0,0224
$\beta = 1$ $\delta = 2$	0,0278	0,0862	0,0250	0,0946
$\beta = 1$ $\delta = 3$	0,0267	0,2030	0,0241	0,2000
$\beta = 1$ $\delta = 4$	0,0262	0,3700	0,0214	0,3268
$\beta = 1$ $\delta = 5$	0,0260	0,5870	0,0225	0,5105
$\beta = 0{,}20$ $\delta = 2$	0,0011	0,0862	0,0012	0,1116
$\beta = 0{,}20$ $\delta = 3$	0,0010	0,2029	0,0012	0,2204
$\beta = 0{,}50$ $\delta = 2$	0,0069	0,0862	0,0066	0,0971
$\beta = 0{,}33$ $\delta = 3$	0,0029	0,2029	0,0029	0,2699

Men ziet dat in beide gevallen de asymptotische en simulatie resultaten dicht bij elkaar liggen, althans voor wat betreft een steekproef ter grootte van n = 80.

Appendix I :

Afleiding van systeem - momenten

Stel dat de relatie tussen de stochastische systeem - variabele $\underline{z}$ en de stochastische component - variabelen $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$, ---- $\underline{x}_n$ aangegeven wordt door:

(1) $$\underline{z} = k\ (\underline{x}_1, \underline{x}_2, ---- \underline{x}_n)$$

We definiëren verder:

$E\ (\underline{x}_i)$ = verwachte waarde van de $i^{\underline{de}}$ component - variabele ($i = 1,2,-- n$);

$E\ [\ \underline{x}_i - E\ (\ \underline{x}_i)\ ]^r$ = $r^{\underline{de}}$ moment rond het gemiddelde van de $i^{\underline{de}}$ component - variabele ($i = 1,2,$ --- n; $r = 2,3,4$);

$E\ (\ \underline{z}\ )$ = verwachte waarde van de systeem - variabele

$E\ [\ \underline{z} - E\ (\underline{z})\ ]^r$ = $r^{\underline{de}}$ moment rond het gemiddelde van de systeem - variabele ($r = 2,3,4$)

A. Veronderstel dat de stochastische component - variabelen niet gecorreleerd zijn.

Dan kan men laten zien dat:

$$E\left\{[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]^r [\underline{x}_j - E(\underline{x}_j)]^s\right\} = E[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]^r E[\underline{x}_j - E(\underline{x}_j)]^s$$

Eerst passen we op $k(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \text{---}\ \underline{x}_n)$ een Taylor-reeksontwikkeling toe tot en met de 2^{de} orde term rond $-[E(\underline{x}_1), E(\underline{x}_2), \text{---}\ E(\underline{x}_n)]$ - het punt waar iedere component-variabele zijn verwachte waarde aanneemt.

$$(2)\quad k(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \text{---}\ \underline{x}_n) \simeq k[E(\underline{x}_1), E(\underline{x}_2), \text{---}\ E(\underline{x}_n)] + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i}[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)] +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i^2}[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]^2 + 2 \sum_{\substack{i \\ i<j}} \sum_{j} \frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i \partial \underline{x}_j}[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)][\underline{x}_j - E(\underline{x}_j)]\right\}$$

waarbij alle afgeleiden geëvalueerd worden in de verwachte waarde -dus $\frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i}$ betekent $\left.\frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i}\right]_{\underline{x}_p = E(\underline{x}_p)}$ $(p = 1,2,\ldots n)$

Door de verwachte waarde van beide zijden van (2) te nemen, krijgen we

$$(3)\quad E[k(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \text{---}\ \underline{x}_n)] \simeq E\left\{k[E(\underline{x}_1, \underline{x}_2, \text{---}\ \underline{x}_n)]\right\} + E\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i}[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]\right\} +$$

$$+ \left\{\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i}[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]^2\right\} + E\left\{\sum_{\substack{i \\ i<j}} \sum_{j} \frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i \partial \underline{x}_j}[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)][\underline{x}_j - E(\underline{x}_j)]\right\}$$

Hierbij geldt:

$$E\left\{k[E(\underline{x}_1), E(\underline{x}_2), \text{---}\ E(\underline{x}_n)]\right\} = k[E(\underline{x}_1), E(\underline{x}_2), \text{---}\ E(\underline{x}_n)]$$

$$E\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i}[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]\right\} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i}\left\{E[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]\right\} = 0$$

$$E\left\{ \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i^2} [\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]^2 \right\} = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i^2} \ \mathrm{VAR}\ (\underline{x}_i)$$

$$E\left\{ \sum_{i<j} \sum_{j} \frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i \partial \underline{x}_j} [\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]\ [\underline{x}_j - E(\underline{x}_j)] \right\} =$$

$$\sum_{i<j} \sum_{j} \frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i \partial \underline{x}_j}\ E\left\{ [\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]\ [\underline{x}_j - E(\underline{x}_j)] \right\} = 0$$

Het resultaat is nu:

(4) $E(\underline{z}) \simeq k\ [E(\underline{x}_1).\ E(\underline{x}_2),\ ---\ E(\underline{x}_n)] + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i^2}\ \mathrm{VAR}\ (\underline{x}_i)$

De variantie van de systeem-variabele kan als volgt worden berekend:

(5) $\mathrm{VAR}\ (\underline{z}) = E\ \{\underline{z}^2\} - \{E(\underline{z})\}^2$

(6) $E\{[k(\underline{x}_1,\ \underline{x}_2,\ ---\ \underline{x}_n)]^2\} \simeq \{k[E(\underline{x}_1),\ E(\underline{x}_2),\ ---\ E(\underline{x}_n)]\}^2 +$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i}\right)^2 E\ [\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]^2 + k\ [E(\underline{x}_1),\ E(\underline{x}_2),\ ---\ E(\underline{x}_n)]\ *$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i^2} E\ [\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i}\right) \left(\frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i^2}\right) E[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]^3$$

Termen hoger dan van de derde orde worden verwaarloosd en verder is rekening gehouden met het feit dat de covarianties nul zijn.

(7) $\{E[k(\underline{x}_1,\ \underline{x}_2,\ ---\ \underline{x}_n)]\}^2 \simeq \{k[E(\underline{x}_1),\ E(\underline{x}_2),\ ---\ E(\underline{x}_n)] +$

$$+ \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i^2} \mathrm{VAR}\ (\underline{x}_i)\}^2 \simeq \{k[E(\underline{x}_1),\ E(\underline{x}_2),\ ---\ E(\underline{x}_n)]\}^2$$

$$+ k\ [E(\underline{x}_1),\ E(\underline{x}_2),\ ---\ E(\underline{x}_n)] \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i^2} E[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]^2$$

(8) $\mathrm{VAR}\ (\underline{z}) \simeq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i}\right)^2 E[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i}\right) \left(\frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i^2}\right) E[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]^3$

B. <u>De stochastische component-variabelen zijn wel gecorreleerd</u>.

$$(9).\ E(\underline{z}) \simeq k\ [E(\underline{x}_1),\ E(\underline{x}_2),\ ---\ E(\underline{x}_n)] + ½ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i^2} \text{VAR}\ (\underline{x}_i) +$$

$$+ \sum_{i_{i<j}} \sum_{j} \frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i \partial \underline{x}_j} E\{[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]\ [\underline{x}_j - E(\underline{x}_j)]\}$$

$$(10)\ \text{VAR}\ (\underline{z}) \simeq \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i})^2\ \text{VAR}\ (\underline{x}_i) + 2 \sum_{i_{i<j}} \sum_{j} (\frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i})\ (\frac{\partial k}{\partial \underline{x}_j}) *$$

$$* E\{[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]\ [\underline{x}_j - E(\underline{x}_j)]\} + \sum_{i=1}^{n} (\frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i})\ (\frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i^2})\ E\ [\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]^3 +$$

$$+ \sum_{i_{i \neq j}} \sum_{j} (\frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i})\ (\frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_j^2})\ E\{[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]\ [\underline{x}_j - E(\underline{x}_j)]^2\}$$

$$+ 2 \sum_{i_{i \neq j}} \sum_{j} (\frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i})\ (\frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_i \partial \underline{x}_j})\ E\{[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]^2\ [\underline{x}_j - E(\underline{x}_j)]\} +$$

$$+ 2 \sum_{i_{i \neq j}} \sum_{j_{\neq s}} \sum_{s} (\frac{\partial k}{\partial \underline{x}_i})\ (\frac{\partial^2 k}{\partial \underline{x}_j \partial \underline{x}_s})\ E\{[\underline{x}_i - E(\underline{x}_i)]\ [\underline{x}_j - E(\underline{x}_j)]\ [\underline{x}_s - E(\underline{x}_s)]\}$$

In de praktijk worden van formule (10) meestal alleen de twee eerste termen gebruikt en de rest verwaarloosd.

Literatuurverwijzing:

[1] D. Chapman: "Estimating the parameters of a truncated gamma distribution". Annals of Math. Stat., Vol 27, (1956), 485-506

[2] J.A. Greenwood en D. Durand: "Aids for fitting the gamma distribution by maximum likelihood" Technometrics, Vol 2, (1960), Nr. I, 55 e.v.

[3] H. Chernoff en E.L. Lehmann: "The use of maximum likelihood estimates in χ^2 tests for goodness of fit" Annals of Math. Stat., Vol 25, (1954), 579-586

[4] J. Hermans: "De Chi-kwadraat-toets vocr aanpassing van continue verdelingen" Statistica Neerlandia, 23 (1969), Nr. 4 blz. 277-285

[5] M.J. Kendall en A.S. Stuart: "The Advanced Theory of Statistics" deel 2, blz. 55

[6] M. Masuyama en Y. Kuroiwa: "Table for the likelihood solutions of gamma distributions and its medical applications". Report of Statistical Applications, Research, Union of Japanese Scientists and Engineers Vol 1, 18 - 23

[7] M. Abramowitz en I.A. Stagun: "Handbook of Mathematical Functions" Dover Publications, Inc., New York

R.M.J. Heuts

Tilburg, 4 dec. 1969

TABEL I:

METHODE 1	BETA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.4672
METHODE 1	DELTA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.4215
METHODE 2	BETA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.4569
METHODE 2	DELTA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.3165
METHODE 3	BETA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.3483
METHODE 3	DELTA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.3333
METHODE 1	BETA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.3379
METHODE 1	DELTA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.3631
METHODE 2	BETA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.3143
METHODE 2	DELTA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.2395
METHODE 3	BETA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.2352
METHODE 3	DELTA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.2543
METHODE 1	BETA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.2595
METHODE 1	DELTA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.2705
METHODE 2	BETA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.2870
METHODE 2	DELTA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.1968
METHODE 3	BETA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.2041
METHODE 3	DELTA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.1896
METHODE 1	BETA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.2325
METHODE 1	DELTA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.2255
METHODE 2	BETA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.2574
METHODE 2	DELTA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.1789
METHODE 3	BETA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = [illegible] ,	AANTAL STEEKPROEVEN = [illegible] ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.1786
METHODE 3	DELTA = 1.0 ,	ST.PR.GROOTTE = [illegible] ,	[illegible] ,	ONNAUWKEURIGHEID =	.1512

METHODE 1	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .4007
METHODE 1		DELTA = 2.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = 1.0503
METHODE 2	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .3710
METHODE 2		DELTA = 2.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .9234
METHODE 3	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .3365
METHODE 3		DELTA = 2.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .9806
METHODE 1	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .2717
METHODE 1		DELTA = 2.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .5823
METHODE 2	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .2627
METHODE 2		DELTA = 2.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .5040
METHODE 3	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .2293
METHODE 3		DELTA = 2.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .5342
METHODE 1	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .2203
METHODE 1		DELTA = 2.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .5090
METHODE 2	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .2235
METHODE 2		DELTA = 2.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .3970
METHODE 3	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .1935
METHODE 3		DELTA = 2.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .4189
METHODE 1	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .2130
METHODE 1		DELTA = 2.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .4090
METHODE 2	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .1892
METHODE 2		DELTA = 2.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .3121
METHODE 3	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID = .1593
METHODE 3		DELTA = 2.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = [illegible]	ONNAUWKEURIGHEID = .3[illegible]74

METHODE 1 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .3996

METHODE 1 DELTA = 3.0 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = 1.4969

METHODE 2 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .3822

METHODE 2 DELTA = 3.0 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = 1.3699

METHODE 3 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .3466

METHODE 3 DELTA = 3.0 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = 1.4234

METHODE 1 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 40 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .2795

METHODE 1 DELTA = 3.0 , ST.PR.GROOTTE = 40 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .9356

METHODE 2 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 40 , AANTAL STEELPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .2569

METHODE 2 DELTA = 3.0 , ST.PR.GROOTTE = 40 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .7276

METHODE 3 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 40 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .2341

METHODE 3 DELTA = 3.0 , ST.PR.GROOTTE = 40 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .7651

METHODE 1 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 60 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .2342

METHODE 1 DELTA = 3.0 , ST.PR.GROOTTE = 60 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .7431

METHODE 2 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 60 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .2144

METHODE 2 DELTA = 3.0 , ST.PR.GROOTTE = 60 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .6223

METHODE 3 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 60 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .1935

METHODE 3 DELTA = 3.0 , ST.PR.GROOTTE = 60 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .6461

METHODE 1 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .1814

METHODE 1 DELTA = 3.0 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .5405

METHODE 2 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .1734

METHODE 2 DELTA = 3.0 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .4471

METHODE 3 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .1560

METHODE 3 DELTA = 3.0 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .4606

METHODE 1 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = 0.3961

METHODE 1 DELTA = 4.0 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = 1.7969

METHODE 2 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = 0.3820

METHODE 2 DELTA = 4.0 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = 1.8617

METHODE 3 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .3543

METHODE 3 DELTA = 4.0 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = 1.9175

METHODE 1 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 40 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .2558

METHODE 1 DELTA = 4.0 , ST.PR.GROOTTE = 40 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = 1.0871

METHODE 2 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 40 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .2400

METHODE 2 DELTA = 4.0 , ST.PR.GROOTTE = 40 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .9893

METHODE 3 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 40 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .2236

METHODE 3 DELTA = 4.0 , ST.PR.GROOTTE = 40 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = 1.0289

METHODE 1 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 60 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .2213

METHODE 1 DELTA = 4.0 , ST.PR.GROOTTE = 60 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .8699

METHODE 2 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 60 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .2000

METHODE 2 DELTA = 4.0 , ST.PR.GROOTTE = 60 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .7495

METHODE 3 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 60 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .1836

METHODE 3 DELTA = 4.0 , ST.PR.GROOTTE = 60 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .7676

METHODE 1 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .1864

METHODE 1 DELTA = 4.0 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .6730

METHODE 2 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .1607

METHODE 2 DELTA = 4.0 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .5721

METHODE 3 BETA = 1.0 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .1458

METHODE 3 DELTA = 4.0 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID = .5790

METHODE 1	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID 0.3852
METHODE 1		DELTA = 5.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID 2.1973
METHODE 2	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID 0.3472
METHODE 2		DELTA = 5.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID 2.2165
METHODE 3	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID 0.3255
METHODE 3		DELTA = 5.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID 2.2607
METHODE 1	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID .2595
METHODE 1		DELTA = 5.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID 1.4863
METHODE 2	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID .2458
METHODE 2		DELTA = 5.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID 1.3792
METHODE 3	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID .2325
METHODE 3		DELTA = 5.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 40 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID 1.4230
METHODE 1	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID .2086
METHODE 1		DELTA = 5.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID 1.0276
METHODE 2	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID .1812
METHODE 2		DELTA = 5.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID .8871
METHODE 3	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID .1699
METHODE 3		DELTA = 5.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 60 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID .9112
METHODE 1	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID .1738
METHODE 1		DELTA = 5.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID .8269
METHODE 2	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID .1594
METHODE 2		DELTA = 5.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID .7122
METHODE 3	BETA = 1.0 ,		ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID .1508
METHODE 3		DELTA = 5.0 ,	ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID .7361

METHODE 1	BETA = .50 ,		ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID	.1807
METHODE 1		DELTA = 2.00 ,	ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID	.9827
METHODE 2	BETA = .50 ,		ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID	.1837
METHODE 2		DELTA = 2.00 ,	ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID	.8706
METHODE 3	BETA = .50 ,		ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID	.1634
METHODE 3		DELTA = 2.00 ,	ST.PR.GROOTTE = 20 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID	.9198
METHODE 1	BETA = .50 ,		ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID	.0968
METHODE 1		DELTA = 2.00 ,	ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID	.4094
METHODE 2	BETA = .50 ,		ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID	.0997
METHODE 2		DELTA = 2.00 ,	ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID	.3232
METHODE 3	BETA = .50 ,		ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID	.0813
METHODE 3		DELTA = 2.00 ,	ST.PR.GROOTTE = 80 ,	AANTAL STEEKPROEVEN = 200 ,	ONNAUWKEURIGHEID	.3155

METHODE 1 BETA = .2, ST.PR.GROOTTE = 20, AANTAL STEEKPROEVEN = 200, ONNAUWKEURIGHEID . 0784
METHODE 1 DELTA = 2.0, ST.PR.GROOTTE = 20, AANTAL STEEKPROEVEN = 200, ONNAUWKEURIGHEID . 8571
METHODE 2 BETA = .2, ST.PR.GROOTTE = 20, AANTAL STEEKPROEVEN = 200, ONNAUWKEURIGHEID . 0695
METHODE 2 DELTA = 2.0, ST.PR.GROOTTE = 20, AANTAL STEEKPROEVEN = 200, ONNAUWKEURIGHEID . 6885
METHODE 3 BETA = .2, ST.PR.GROOTTE = 20, AANTAL STEEKPROEVEN = 200, ONNAUWKEURIGHEID . 0605
METHODE 3 DELTA = 2.0, ST.PR.GROOTTE = 20, AANTAL STEEKPROEVEN = 200, ONNAUWKEURIGHEID . 7327

METHODE 1 BETA = .2, ST.PR.GROOTTE = 80, AANTAL STEEKPROEVEN = 200, ONNAUWKEURIGHEID . 0462
METHODE 1 DELTA = 2.0, ST.PR.GROOTTE = 80, AANTAL STEEKPROEVEN = 200, ONNAUWKEURIGHEID . 4440
METHODE 2 BETA = .2, ST.PR.GROOTTE = 80, AANTAL STEEKPROEVEN = 200, ONNAUWKEURIGHEID . 0419
METHODE 2 DELTA = 2.0, ST.PR.GROOTTE = 80, AANTAL STEEKPROEVEN = 200, ONNAUWKEURIGHEID . 3383
METHODE 3 BETA = .2, ST.PR.GROOTTE = 80, AANTAL STEEKPROEVEN = 200, ONNAUWKEURIGHEID . 0349
METHODE 3 DELTA = 2.0, ST.PR.GROOTTE = 80, AANTAL STEEKPROEVEN = 200, ONNAUWKEURIGHEID . 3425

METHODE 1 BETA = .50 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .1807

METHODE 1 DELTA = 2.00 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .9827

METHODE 2 BETA = .50 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .1837

METHODE 2 DELTA = 2.00 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .8706

METHODE 3 BETA = .50 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .1634

METHODE 3 DELTA = 2.00 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .9198

METHODE 1 BETA = .50 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .0968

METHODE 1 DELTA = 2.00 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .4094

METHODE 2 BETA = .50 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .0997

METHODE 2 DELTA = 2.00 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .3232

METHODE 3 BETA = .50 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .0813

METHODE 3 DELTA = 2.00 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .3155

METHODE 1 BETA = .33 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .1519
METHODE 1 DELTA = 3.00 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID 1.5561
METHODE 2 BETA = .33 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .1229
METHODE 2 DELTA = 3.00 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID 1.3734
METHODE 3 BETA = .33 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .1122
METHODE 3 DELTA = 3.00 , ST.PR.GROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONAAUWKEURIGHEID 1.4235

METHODE 1 BETA = .33 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .0638
METHODE 1 DELTA = 3.00 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .6249
METHODE 2 BETA = .33 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .0599
METHODE 2 DELTA = 3.00 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .5168
METHODE 3 BETA = .33 , ST.PR.GROOTTE = 80 AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .0552
METHODE 3 DELTA = 3.00 , ST.PR.GROOTTE = 80 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200 , ONNAUWKEURIGHEID .5456

Toelichting bij tabel II:

Er worden n trekkingen gedaan uit een bepaald type Erlang-verdeling waarna de volgende grootheden bepaald worden:

$$S\,(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (n= 20,\ 40,\ 60 \text{ of } 80)$$

$$S\,(\ln\,(X)) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

BETA (I) = schatting van β m.b.v. i$^{\underline{de}}$ methode voor steekproefgrootte n
DELTA (I) = " " δ " " " " " " "

Vervolgens wordt de logarithme van de aannemelijkheidsfunctie geëvalueerd in bepaalde punten:

$$L\,N\,(Lo) = -n\ \ln\beta - n\ln\Gamma(\delta) + (\delta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(Substitueer voor β en δ de exacte waarden)

$$L\,N\,(L1) = -n\ln\hat{\beta}_1 - n\ln\Gamma(\hat{\delta}_1)+(\hat{\delta}_1-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{1}{\hat{\beta}_1}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(Substitueer voor β en δ de verkregen schattingen bij methode 1)

$$L\,N\,(L2) = -n\ln\hat{\beta}_2 - n\ln\Gamma(\hat{\delta}_2)+(\hat{\delta}_2-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{1}{\hat{\beta}_2}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(Substitueer voor β en δ de verkregen schattingen bij methode 2)

$$L\,N\,(L3) = -n\ln\hat{\beta}_3 - n\ln\Gamma(\hat{\delta}_3)+(\hat{\delta}_3-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{1}{\hat{\beta}_3}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

(Substitueer voor β en δ de verkregen schattingen bij methode 3)

Na 200 keer een trekking ter grootte van n gedaan te hebben, wordt berekend hoe vaak iedere methode een maximum voor L N L heeft gegeven.

BETA = 1.0 , DELTA = 1.0 , STEEKPROFGROOTTE = 20 , AANTAL STEEKPROEVEN = 200.

DE STARTWAARDE VAN DE RANDOM-GENERATOR BIJ DEZE PARAMETERS IS .31415927

ER WORDEN TREKKINGEN GEDAAN UIT DE GAMMA-VERDELING MET BETA = 1.0 EN DELTA = 1.0

I	S(X)	S(LN(X))	BETA 1	BETA 2	BETA 3	DELTA1	DELTA2	DELTA3	LN(L0)	LN(L1)	LN(L2)	LN(L3)
1	.18948E+02	-.12605E+02	.7343	1.0919	.9460	1.2901	.8676	1.0014	-.1894E+02	-.1936E+02	-.1904E+02	-.1891E+02
2	.19632E+02	-.92892E+01	.6720	.8753	.7778	1.4605	1.1213	1.2620	-.1963E+02	-.1945E+02	-.1939E+02	-.1931E+02
3	.21274E+02	-.41738E+01	.7429	.5754	.5320	1.4317	1.8486	1.9992	-.2127E+02	-.1950E+02	-.1895E+02	-.1891E+02
4	.25996E+02	-.53737E+01	1.3398	1.3802	1.2058	.9701	.9417	1.0779	-.2599E+02	-.2527E+02	-.2532E+02	-.2520E+02
5	.20997E+02	-.12700E+02	1.2756	1.4356	1.2208	.8230	.7313	.8599	-.2099E+02	-.2082E+02	-.2098E+02	-.2081E+02
6	.22288E+02	-.53648E+01	.6964	.8393	.7570	1.6001	1.3276	1.4721	-.2228E+02	-.2139E+02	-.2141E+02	-.2135E+02
7	.20344E+02	-.12686E+02	.8778	1.3251	1.1330	1.1588	.7676	.8977	-.2034E+02	-.2072E+02	-.2041E+02	-.2026E+02
8	.22297E+02	-.14175E+02	2.0247	1.8229	1.5182	.5506	.6115	.7343	-.2229E+02	-.2198E+02	-.2168E+02	-.2146E+02
9	.19200E+02	-.12932E+02	.8807	1.1632	1.0024	1.0899	.8252	.9577	-.1920E+02	-.1928E+02	-.1931E+02	-.1917E+02
10	.32165E+02	-.16872E+01	2.1513	1.7997	1.5640	.7475	.8936	1.0282	-.3216E+02	-.3009E+02	-.2961E+02	-.2949E+02
11	.17103E+02	-.18322E+02	1.1640	1.2993	1.0916	.7346	.6581	.7833	-.1710E+02	-.1646E+02	-.1663E+02	-.1644E+02
12	.15636E+02	-.16143E+02	.9218	.8771	.7621	.8480	.8912	1.0258	-.1563E+02	-.1529E+02	-.1519E+02	-.1507E+02
13	.25573E+02	-.54807E+01	1.3214	1.3295	1.1640	.9676	.9617	1.0984	-.2557E+02	-.2496E+02	-.2497E+02	-.2486E+02
14	.20223E+02	-.13586E+02	.7328	1.3962	1.1860	1.3796	.7242	.8525	-.2022E+02	-.2181E+02	-.2021E+02	-.2004E+02
15	.15457E+02	-.16927E+02	.7515	.9100	.7866	1.0284	.8492	.9825	-.1545E+02	-.1485E+02	-.1497E+02	-.1484E+02
16	.20154E+02	-.76833E+01	.6490	.7897	.7098	1.5526	1.2759	1.4195	-.2015E+02	-.1952E+02	-.1954E+02	-.1947E+02
17	.23601E+02	-.81598E+01	.9234	1.3537	1.1734	1.2779	.8717	1.0056	-.2360E+02	-.2370E+02	-.2343E+02	-.2331E+02
18	.21563E+02	-.12734E+02	1.0160	1.5352	1.2996	1.0611	.7022	.8295	-.2156E+02	-.2169E+02	-.2143E+02	-.2125E+02
19	.20918E+02	-.10329E+02	.9039	1.1743	1.0202	1.3010	.8906	1.0251	-.2091E+02	-.2128E+02	-.2101E+02	-.2089E+02
20	.25027E+02	-.14734E+02	1.9496	2.4049	1.9635	.6418	.5203	.6372	-.2502E+02	-.2286E+02	-.2313E+02	-.2286E+02
21	.24525E+02	-.73675E+01	1.4989	1.4037	1.2170	.8180	.8735	1.0075	-.2452E+02	-.2434E+02	-.2420E+02	-.2407E+02
22	.25660E+02	-.35358E+01	.8405	1.0931	.9753	1.5263	1.1737	1.3154	-.2566E+02	-.2469E+02	-.2463E+02	-.2455E+02
23	.22494E+02	-.12716E+02	1.1382	1.6947	1.4252	.9881	.6636	.7891	-.2249E+02	-.2231E+02	-.2214E+02	-.2194E+02
24	.19966E+02	-.10005E+02	1.0504	.9955	.8752	.9504	1.0027	1.1406	-.1996E+02	-.2006E+02	-.1996E+02	-.1986E+02
25	.14969E+02	-.18923E+02	.9374	.9826	.8394	.7984	.7616	.8916	-.1496E+02	-.1419E+02	-.1427E+02	-.1411E+02
26	.15179E+02	-.21827E+02	.9431	1.2379	1.0314	.8047	.6130	.7358	-.1517E+02	-.1384E+02	-.1400E+02	-.1378E+02
27	.13031E+02	-.14712E+02	.4730	.4003	.3669	1.3772	1.6274	1.7758	-.1303E+02	-.1011E+02	-.9808E+01	-.9764E+01
28	.17901E+02	-.14995E+02	.9358	1.1437	.9799	.9564	.7825	.9133	-.1790E+02	-.1774E+02	-.1787E+02	-.1772E+02
29	.29723E+02	-.12573E+02	3.6799	3.0463	2.4669	.4038	.4878	.6024	-.2972E+02	-.2684E+02	-.2611E+02	-.2581E+02
30	.21710E+02	-.12950E+02	1.1032	1.5839	1.3370	.9838	.6853	.8118	-.2171E+02	-.2159E+02	-.2151E+02	-.2133E+02
31	.22428E+02	-.13364E+02	1.8729	1.7557	1.4699	.5987	.6387	.7628	-.2242E+02	-.2213E+02	-.2196E+02	-.2175E+02
32	.24714E+02	-.76293E+01	1.2153	1.4658	1.2660	1.0168	.8429	.9760	-.2471E+02	-.2424E+02	-.2436E+02	-.2422E+02
33	.14488E+02	-.17817E+02	.8701	.8237	.7147	.8325	.8794	1.0136	-.1448E+02	-.1378E+02	-.1367E+02	-.1355E+02
34	.19808E+02	-.80893E+01	.5591	.7821	.7045	1.7714	1.2663	1.4097	-.1980E+02	-.1949E+02	-.1922E+02	-.1915E+02
35	.19797E+02	-.82122E+01	.5377	.7928	.7112	1.8408	1.2485	1.3917	-.1979E+02	-.1970E+02	-.1925E+02	-.1918E+02
36	.14887E+02	-.18002E+02	.7860	.9006	.7762	.9470	.8265	.9589	-.1488E+02	-.1408E+02	-.1422E+02	-.1408E+02
37	.24383E+02	-.14543E+02	2.0565	2.2563	1.8510	.5928	.5403	.6586	-.2438E+02	-.2267E+02	-.2285E+02	-.2259E+02
38	.18010E+02	-.15930E+02	.9083	1.2458	1.0581	.9914	.7228	.8510	-.1801E+02	-.1788E+02	-.1789E+02	-.1772E+02
39	.22671E+02	-.11227E+02	1.1844	1.5569	1.3233	.9570	.7280	.8565	-.2267E+02	-.2242E+02	-.2250E+02	-.2234E+02
40	.17209E+02	-.14996E+02	.5732	1.0317	.8900	1.5010	.8339	.9667	-.1720E+02	-.1841E+02	-.1712E+02	-.1698E+02

I	S(X)	S(LN(X))	BETA 1	BETA 2	BETA 3	DELTA1	DELTA2	DELTA3	LN(LO)	LN(L1)	LN(L2)	LN(L3)
41	.19209E+02	-.62348E+01	.5849	.5213	.4819	1.6419	1.8422	1.9927	-.1920E+02	-.1710E+02	-.1693E+02	-.1689E+02
42	.18915E+02	-.89368E+01	.7072	.7398	.6650	1.3372	1.2784	1.4220	-.1891E+02	-.1822E+02	-.1826E+02	-.1819E+02
43	.15483E+02	-.15065E+02	.5302	.7700	.6771	1.4599	1.0054	1.1433	-.1548E+02	-.1517E+02	-.1487E+02	-.1477E+02
44	.19695E+02	-.15410E+02	1.0569	1.4872	1.2504	.9316	.6621	.7875	-.1969E+02	-.1948E+02	-.1947E+02	-.1928E+02
45	.19340E+02	-.10208E+02	.6236	.9224	.8144	1.5507	1.0483	1.1873	-.1934E+02	-.1963E+02	-.1924E+02	-.1915E+02
46	.19362E+02	-.10821E+02	.8829	.9848	.8641	1.0964	.9829	1.1203	-.1936E+02	-.1927E+02	-.1937E+02	-.1927E+02
47	.21749E+02	-.97206E+01	1.4990	1.2394	1.0751	.7254	.8773	1.0114	-.2174E+02	-.2232E+02	-.2180E+02	-.2167E+02
48	.15048E+02	-.13830E+02	.4903	.6126	.5488	1.5351	1.2282	1.3710	-.1504E+02	-.1383E+02	-.1382E+02	-.1375E+02
49	.20489E+02	-.10112E+02	1.0917	1.0855	.9486	.9383	.9437	1.0799	-.2048E+02	-.2056E+02	-.2055E+02	-.2044E+02
50	.18049E+02	-.16983E+02	.9156	1.3475	1.1344	.9856	.6697	.7954	-.1804E+02	-.1790E+02	-.1776E+02	-.1757E+02
51	.24666E+02	-.13916E+02	1.5827	2.2336	1.8372	.7792	.5521	.6712	-.2466E+02	-.2312E+02	-.2321E+02	-.2295E+02
52	.27122E+02	-.16941E+01	.9780	1.0559	.9496	1.3865	1.2842	1.4280	-.2712E+02	-.2539E+02	-.2545E+02	-.2539E+02
53	.21295E+02	-.10462E+02	1.1546	1.2476	1.0789	.9221	.8534	.9868	-.2129E+02	-.2128E+02	-.2138E+02	-.2125E+02
54	.13800E+02	-.18049E+02	.6160	.7334	.6407	1.1201	.9407	1.0769	-.1380E+02	-.1255E+02	-.1265E+02	-.1254E+02
55	.24809E+02	-.57058E+01	1.3352	1.2424	1.0918	.9290	.9984	1.1361	-.2480E+02	-.2445E+02	-.2431E+02	-.2421E+02
56	.18924E+02	-.13647E+02	1.1312	1.1868	1.0189	.8364	.7972	.9286	-.1892E+02	-.1892E+02	-.1900E+02	-.1885E+02
57	.26471E+02	-.45358E+01	2.8882	1.3423	1.1781	.4582	.9859	1.1233	-.2647E+02	-.2960E+02	-.2562E+02	-.2552E+02
58	.20567E+02	-.84475E+01	1.0797	.9263	.8222	.9524	1.1101	1.2506	-.2056E+02	-.2069E+02	-.2035E+02	-.2026E+02
59	.21258E+02	-.74902E+01	.7008	.9259	.8244	1.5166	1.1479	1.2892	-.2125E+02	-.2101E+02	-.2092E+02	-.2084E+02
60	.25106E+02	-.42960E+01	.7365	1.1101	.9871	1.7043	1.1307	1.2716	-.2510E+02	-.2479E+02	-.2429E+02	-.2421E+02
61	.24509E+02	-.57701E+01	.8714	1.2054	1.0612	1.4061	1.0165	1.1547	-.2450E+02	-.2419E+02	-.2404E+02	-.2394E+02
62	.17422E+02	-.11436E+02	.7045	.7559	.6733	1.2364	1.1523	1.2937	-.1742E+02	-.1687E+02	-.1693E+02	-.1685E+02
63	.23773E+02	-.69061E+01	.8752	1.2318	1.0788	1.3580	.9649	1.1017	-.2377E+02	-.2369E+02	-.2350E+02	-.2339E+02
64	.20840E+02	-.11000E+02	1.1694	1.2319	1.0644	.8909	.8457	.9789	-.2084E+02	-.2087E+02	-.2095E+02	-.2081E+02
65	.19432E+02	-.15147E+02	2.0822	1.4158	1.1953	.4666	.6862	.8128	-.1943E+02	-.2091E+02	-.1930E+02	-.1911E+02
66	.20961E+02	-.75243E+01	.8390	.8869	.7918	1.2490	1.1816	1.3235	-.2096E+02	-.2051E+02	-.2056E+02	-.2049E+02
67	.17634E+02	-.19198E+02	.8627	1.4708	1.2221	1.0220	.5994	.7214	-.1763E+02	-.1759E+02	-.1690E+02	-.1668E+02
68	.20132E+02	-.10705E+02	1.0324	1.0909	.9511	.9749	.9227	1.0582	-.2013E+02	-.2015E+02	-.2022E+02	-.2011E+02
69	.23583E+02	-.82663E+01	1.3788	1.3633	1.1806	.8551	.8648	.9986	-.2358E+02	-.2344E+02	-.2342E+02	-.2329E+02
70	.12668E+02	-.15778E+02	.2918	.4209	.3835	2.1704	1.5046	1.6515	-.1266E+02	-.1003E+02	-.9608E+01	-.9557E+01
71	.17761E+02	-.18649E+02	1.1328	1.4454	1.2045	.7839	.6144	.7372	-.1776E+02	-.1696E+02	-.1715E+02	-.1693E+02
72	.13067E+02	-.21415E+02	.6799	.8430	.7215	.9609	.7750	.9054	-.1306E+02	-.1144E+02	-.1157E+02	-.1142E+02
73	.29906E+02	-.30705E+01	1.5717	1.6624	1.4457	.9513	.8994	1.0343	-.2990E+02	-.2808E+02	-.2816E+02	-.2803E+02
74	.32352E+02	-.32834E+01	1.5298	2.0871	1.7863	1.0573	.7750	.9055	-.3235E+02	-.2971E+02	-.2970E+02	-.2955E+02
75	.10401E+02	-.19022E+02	.3392	.3092	.2840	1.5328	1.6816	1.8306	-.1040E+02	-.5273E+01	-.5138E+01	-.5097E+01
76	.25892E+02	-.70729E+01	1.2128	1.5843	1.3638	1.0674	.8171	.9492	-.2589E+02	-.2523E+02	-.2528E+02	-.2514E+02
77	.15876E+02	-.14285E+02	1.6441	.7674	.6767	.4828	1.0343	1.1730	-.1587E+02	-.1920E+02	-.1532E+02	-.1522E+02
78	.26928E+02	-.70479E+01	1.3148	1.7499	1.4965	1.0239	.7694	.8996	-.2692E+02	-.2598E+02	-.2602E+02	-.2587E+02
79	.19631E+02	-.98679E+01	.7045	.9321	.8233	1.3931	1.0530	1.1921	-.1963E+02	-.1960E+02	-.1953E+02	-.1944E+02
80	.20093E+02	-.94511E+01	1.0309	.9589	.8466	.9745	1.0476	1.8166	-.2009E+02	-.2014E+02	-.2001E+02	-.1991E+02
81	.12482E+02	-.24324E+02	.7828	.9297	.7829	.7972	.6712	.7971	-.1248E+02	-.1020E+02	-.1039E+02	-.1020E+02
82	.18366E+02	-.10080E+02	.7587	.7691	.6873	1.2103	1.1938	1.3360	-.1836E+02	-.1787E+02	-.1789E+02	-.1781E+02
83	.19130E+02	-.16865E+02	1.3706	1.5281	1.2763	.6978	.6259	.7494	-.1913E+02	-.1853E+02	-.1870E+02	-.1849E+02
84	.16271E+02	-.17048E+02	.8859	1.0513	.8996	.9183	.7738	.9042	-.1627E+02	-.1580E+02	-.1595E+02	-.1580E+02
85	.22154E+02	-.64642E+01	.8792	.9427	.8412	1.2599	1.1749	1.3167	-.2215E+02	-.2162E+02	-.2169E+02	-.2161E+02
86	.16337E+02	-.11243E+02	.6487	.5879	.5322	1.2590	1.3892	1.5346	-.1633E+02	-.1519E+02	-.1502E+02	-.1497E+02
87	.19703E+02	-.70351E+01	.7355	.6636	.6039	1.3392	1.4844	1.6311	-.1970E+02	-.1866E+02	-.1850E+02	-.1844E+02
88	.25735E+02	-.70265E+01	1.4171	1.5530	1.3388	.9079	.8285	.9610	-.2573E+02	-.2505E+02	-.2516E+02	-.2503E+02
89	.17490E+02	-.13703E+02	.9241	.9639	.8390	.9463	.9072	1.0423	-.1749E+02	-.1736E+02	-.1742E+02	-.1730E+02
90	.20245E+02	-.16455E+02	1.0780	1.6904	1.4044	.9389	.5988	.7207	-.2024E+02	-.1995E+02	-.1966E+02	-.1943E+02
91	.16366E+02	-.10690E+02	.5195	.5467	.4978	1.5750	1.4968	1.6437	-.1636E+02	-.1471E+02	-.1475E+02	-.1470E+02
92	.24935E+02	-.57153E+01	1.2008	1.2625	1.1083	1.0382	.9874	1.1249	-.2493E+02	-.2436E+02	-.2443E+02	-.2432E+02
93	.14777E+02	-.12502E+02	.4439	.4765	.4351	1.6643	1.5503	1.6979	-.1477E+02	-.1250E+02	-.1255E+02	-.1250E+02
94	.25118E+02	-.11458E+02	.9508	2.0114	1.6794	1.3208	.6243	.7478	-.2511E+02	-.2653E+02	-.2414E+02	-.2393E+02
95	.23067E+02	-.11649E+02	1.2471	1.6728	1.4130	.9247	.6894	.8162	-.2306E+02	-.2266E+02	-.2274E+02	-.2256E+02
96	.18747E+02	-.14740E+02	.7666	1.2604	1.0739	1.2227	.7436	.8728	-.1874E+02	-.1940E+02	-.1874E+02	-.1857E+02
97	.25363E+02	-.55344E+01	.7603	1.3044	1.1433	1.6679	.9721	1.1092	-.2536E+02	-.2587E+02	-.2479E+02	-.2468E+02

I	S(X)	S(LN(X))	BETA 1	BETA 2	BETA 3	DELTA1	DELTA2	DELTA3	LN(LO)	LN(L1)	LN(L2)	LN(L3)
98	.16198E+02	-.16024E+02	.8188	.9564	.8264	.9891	.8468	.9800	-.1619E+02	-.1578E+02	-.1591E+02	-.1578E+02
99	.26315E+02	-.51311E+01	.8374	1.3972	1.2207	1.5712	.9416	1.0777	-.2631E+02	-.2646E+02	-.2556E+02	-.2545E+02
100	.13827E+02	-.16569E+02	.6313	.6351	.5627	1.0951	1.0884	1.2284	-.1382E+02	-.1244E+02	-.1245E+02	-.1236E+02
101	.22604E+02	-.58526E+01	.9457	.9381	.8390	1.1950	1.2047	1.3470	-.2260E+02	-.2203E+02	-.2201E+02	-.2194E+02
102	.17460E+02	-.13634E+02	1.0030	.9532	.8304	.8703	.9158	1.0512	-.1746E+02	-.1748E+02	-.1738E+02	-.1726E+02
103	.18681E+02	-.10505E+02	.6355	.8538	.7569	1.4695	1.0938	1.2339	-.1868E+02	-.1857E+02	-.1846E+02	-.1837E+02
104	.13175E+02	-.16966E+02	.4828	.5677	.5060	1.3643	1.1602	1.3017	-.1317E+02	-.1126E+02	-.1133E+02	-.1125E+02
105	.17155E+02	-.11863E+02	.9873	.7543	.7611	.8687	1.1370	1.2780	-.1715E+02	-.1741E+02	-.1666E+02	-.1658E+02
106	.12699E+02	-.20508E+02	.3702	.7255	.6291	1.7149	.8752	1.0092	-.1269E+02	-.1303E+02	-.1104E+02	-.1091E+02
107	.23203E+02	-.62064E+01	1.2010	1.0647	.9435	.9659	1.0896	1.2296	-.2330E+02	-.2305E+02	-.2280E+02	-.2271E+02
108	.15607E+02	-.15587E+02	.5695	.8293	.7245	1.3701	.9439	1.0770	-.1560E+02	-.1540E+02	-.1511E+02	-.1500E+02
109	.10420E+02	-.24940E+02	.6234	.6201	.5353	.8357	.8402	.9731	-.1042E+02	-.7100E+01	-.7090E+01	-.6956E+01
110	.23197E+02	-.84638E+01	1.1938	1.3257	1.1496	.9715	.8748	1.0088	-.2319E+02	-.2297E+02	-.2309E+02	-.2296E+02
111	.13342E+02	-.16134E+02	.4666	.5363	.4809	1.4296	1.2439	1.3870	-.1334E+02	-.1131E+02	-.1137E+02	-.1130E+02
112	.17122E+02	-.16455E+02	.6368	1.1428	.9744	1.3442	.7491	.8785	-.1712E+02	-.1812E+02	-.1693E+02	-.1677E+02
113	.19942E+02	-.15588E+02	.8678	1.5486	1.2978	1.1490	.6438	.7683	-.1994E+02	-.2066E+02	-.1963E+02	-.1943E+02
114	.18634E+02	-.14408E+02	.6431	1.2107	1.0354	1.4487	.7695	.8998	-.1863E+02	-.2022E+02	-.1866E+02	-.1851E+02
115	.22882E+02	-.39227E+01	.6952	.7569	.6898	1.6456	1.5115	1.6586	-.2288E+02	-.2136E+02	-.2141E+02	-.2136E+02
116	.21525E+02	-.95699E+01	.8661	1.1882	1.0340	1.2425	.9057	1.0408	-.2152E+02	-.2167E+02	-.2157E+02	-.2145E+02
117	.15837E+02	-.12529E+02	.7047	.6226	.5594	1.1235	1.2718	1.4154	-.1583E+02	-.1496E+02	-.1473E+02	-.1466E+02
118	.23483E+02	-.64681E+01	1.0760	1.1365	1.0021	1.0911	1.0330	1.1717	-.2348E+02	-.2309E+02	-.2315E+02	-.2306E+02
119	.14526E+02	-.17661E+02	.6731	.8183	.7107	1.0790	.8875	1.0229	-.1452E+02	-.1362E+02	-.1372E+02	-.1360E+02
120	.25504E+02	-.78028E+01	1.7149	1.6151	1.3851	.7435	.7895	.9206	-.2550E+02	-.2509E+02	-.2496E+02	-.2481E+02
121	.17944E+02	-.13462E+02	.6247	1.0133	.8798	1.4360	.8854	1.0197	-.1794E+02	-.1865E+02	-.1795E+02	-.1782E+02
122	.79524E+01	-.35524E+02	.3713	.6790	.5629	1.0707	.5855	.7067	-.7952E+02	-.1977E+01	-.8730E+00	-.6413E+00
123	.17711E+02	-.11881E+02	.5229	.8369	.7396	1.6935	1.0581	1.1973	-.1771E+02	-.1820E+02	-.1746E+02	-.1737E+02
124	.24716E+02	-.34240E+01	.8283	.9465	.8524	1.4920	1.3056	1.4497	-.2471E+02	-.2348E+02	-.2354E+02	-.2347E+02
125	.16893E+02	-.12533E+02	.8712	.7735	.6856	.9695	1.0919	1.2320	-.1689E+02	-.1670E+02	-.1645E+02	-.1636E+02
126	.24936E+02	-.73344E+01	1.2281	1.4646	1.2662	1.0152	.8513	.9846	-.2493E+02	-.2441E+02	-.2454E+02	-.2441E+02
127	.15305E+02	-.19609E+02	.8475	1.0912	.9235	.9028	.7013	.8286	-.1530E+02	-.1445E+02	-.1457E+02	-.1440E+02
128	.19966E+02	-.11490E+02	.9481	1.1437	.9915	1.0529	.8728	1.0067	-.1996E+02	-.1997E+02	-.2009E+02	-.1996E+02
129	.19293E+02	-.90772E+01	.7832	.8062	.7206	1.2316	1.1964	1.3386	-.1929E+02	-.1883E+02	-.1887E+02	-.1879E+02
130	.15922E+02	-.14063E+02	.8688	.7566	.6682	.9163	1.0522	1.1913	-.1592E+02	-.1565E+02	-.1535E+02	-.1525E+02
131	.18962E+02	-.23635E+02	1.8046	2.1398	1.7112	.5253	.4430	.5540	-.1896E+02	-.1597E+02	-.1629E+02	-.1595E+02
132	.17484E+02	-.10655E+02	.6108	.6964	.6250	1.4311	1.2552	1.3985	-.1748E+02	-.1668E+02	-.1675E+02	-.1668E+02
133	.16640E+02	-.96287E+01	.3709	.4951	.4548	2.2431	1.6804	1.8293	-.1664E+02	-.1475E+02	-.1454E+02	-.1449E+02
134	.18871E+02	-.16597E+02	.7908	1.4564	1.2213	1.1931	.6478	.7725	-.1887E+02	-.1980E+02	-.1855E+02	-.1835E+02
135	.14013E+02	-.16776E+02	.3881	.6770	.5970	1.8050	1.0349	1.1736	-.1401E+02	-.1405E+02	-.1282E+02	-.1273E+02
136	.29687E+02	-.36465E+01	1.0807	1.7139	1.4844	1.3734	.8660	.9999	-.2968E+02	-.2861E+02	-.2802E+02	-.2789E+02
137	.22320E+02	-.79259E+01	1.1629	1.1295	.9916	.9596	.9880	1.1254	-.2232E+02	-.2226E+02	-.2221E+02	-.2210E+02
138	.17727E+02	-.15545E+02	.9904	1.1640	.9943	.8949	.7614	.8913	-.1772E+02	-.1749E+02	-.1765E+02	-.1749E+02
139	.16650E+02	-.15347E+02	.7281	.9724	.8412	1.1433	.8561	.9896	-.1665E+02	-.1647E+02	-.1646E+02	-.1633E+02
140	.14012E+02	-.18844E+02	.4661	.8217	.7105	1.5030	.8525	.9859	-.1401E+02	-.1418E+02	-.1301E+02	-.1288E+02
141	.22008E+02	-.13551E+02	1.4441	1.7017	1.4268	.7619	.6466	.7712	-.2200E+02	-.2142E+02	-.2162E+02	-.2142E+02
142	.17365E+02	-.87498E+01	.5157	.5144	.4727	1.6837	1.6876	1.8367	-.1736E+02	-.1537E+02	-.1537E+02	-.1533E+02
143	.16155E+02	-.17557E+02	.6409	1.0734	.9157	1.2602	.7525	.8821	-.1615E+02	-.1655E+02	-.1578E+02	-.1562E+02
144	.18993E+02	-.11974E+02	1.2407	1.0391	.9051	.7654	.9139	1.0492	-.1899E+02	-.1953E+02	-.1907E+02	-.1895E+02
145	.14821E+02	-.18859E+02	.8001	.9534	.8163	.9261	.7772	.9078	-.1482E+02	-.1394E+02	-.1409E+02	-.1394E+02
146	.15958E+02	-.19381E+02	.7474	1.1862	.9991	1.0674	.6726	.7985	-.1595E+02	-.1573E+02	-.1531E+02	-.1512E+02
147	.19943E+02	-.11238E+02	1.1504	1.1150	.9690	.8667	.8943	1.0289	-.1994E+02	-.2011E+02	-.2005E+02	-.1993E+02
148	.27103E+02	-.31252E+01	1.0386	1.2472	1.1049	1.3047	1.0865	1.2264	-.2710E+02	-.2585E+02	-.2592E+02	-.2583E+02
149	.26206E+02	-.55757E+01	.9622	1.4389	1.2529	1.3617	.9106	1.0458	-.2620E+02	-.2587E+02	-.2551E+02	-.2539E+02
150	.22540E+02	-.45229E+01	.8305	.7792	.7076	1.3568	1.4463	1.5925	-.2254E+02	-.2139E+02	-.2130E+02	-.2124E+02
151	.18461E+02	-.14908E+02	1.3014	1.2284	1.0478	.7093	.7514	.8809	-.1846E+02	-.1858E+02	-.1844E+02	-.1828E+02
152	.18102E+02	-.13076E+02	.9729	1.0031	.8726	.9302	.9023	1.0372	-.1810E+02	-.1807E+02	-.1811E+02	-.1799E+02
153	.26010E+02	-.10110E+02	2.1833	1.9983	1.6767	.5956	.6507	.7756	-.2601E+02	-.2522E+02	-.2498E+02	-.2478E+02
154	.24693E+02	-.12992E+02	1.0854	2.1247	1.7587	1.1374	.5810	.7020	-.2469E+02	-.2510E+02	-.2349E+02	-.2326E+02

I	S(X)	S(LN(X))	BETA 1	BETA 2	BETA 3	DELTA1	DELTA2	DELTA3	LN(LO)	LN(L1)	LN(L2)	LN(L3)
155	.18203E+02	-.94477E+01	.6328	.6885	.6207	1.4382	1.3217	1.4661	-.1820E+02	-.1731E+02	-.1738E+02	-.1731E+02
156	.25576E+02	-.85753E+01	1.3963	1.7256	1.4696	.9158	.7410	.8701	-.2557E+02	-.2480E+02	-.2494E+02	-.2478E+02
157	.29069E+02	-.31781E+01	1.3883	1.5490	1.3528	1.0469	.9383	1.0743	-.2906E+02	-.2745E+02	-.2755E+02	-.2744E+02
158	.22150E+02	-.10673E+02	1.1556	1.4083	1.2072	.9583	.7864	.9173	-.2215E+02	-.2200E+02	-.2214E+02	-.2199E+02
159	.15428E+02	-.17366E+02	.7469	.9393	.8090	1.0327	.8212	.9535	-.1542E+02	-.1483E+02	-.1493E+02	-.1479E+02
160	.20494E+02	-.10750E+02	1.8137	1.1517	1.0005	.5649	.8896	1.0241	-.2049E+02	-.2244E+02	-.2060E+02	-.2048E+02
161	.22017E+02	-.10323E+02	1.1254	1.3480	1.1603	.9781	.8166	.9487	-.2201E+02	-.2190E+02	-.2204E+02	-.2190E+02
162	.16350E+02	-.15617E+02	.5706	.9473	.8201	1.4325	.8629	.9967	-.1635E+02	-.1691E+02	-.1609E+02	-.1597E+02
163	.14808E+02	-.18204E+02	1.0616	.9028	.7775	.6974	.8200	.9522	-.1480E+02	-.1455E+02	-.1411E+02	-.1397E+02
164	.19039E+02	-.11921E+02	.7218	1.0411	.9069	1.3158	.9143	1.0496	-.1903E+02	-.1935E+02	-.1911E+02	-.1900E+02
165	.22969E+02	-.15294E+02	1.0957	2.0746	1.7070	1.0480	.5535	.6728	-.2296E+02	-.2309E+02	-.2180E+02	-.2154E+02
166	.16192E+02	-.12839E+02	.4821	.6975	.6217	1.6790	1.1606	1.3021	-.1619E+02	-.1580E+02	-.1545E+02	-.1537E+02
167	.17704E+02	-.12151E+02	.4907	.8597	.7578	1.8039	1.0295	1.1681	-.1770E+02	-.1876E+02	-.1751E+02	-.1741E+02
168	.19845E+02	-.10944E+02	.9564	1.0705	.9338	1.0374	.9268	1.0625	-.1984E+02	-.1982E+02	-.1993E+02	-.1982E+02
169	.26157E+02	-.41998E+01	1.4612	1.2513	1.1045	.9950	1.0451	1.1840	-.2615E+02	-.2565E+02	-.2529E+02	-.2519E+02
170	.17000E+02	-.11311E+02	.8653	.6852	.6144	.9823	1.2404	1.3834	-.1700E+02	-.1681E+02	-.1623E+02	-.1616E+02
171	.13822E+02	-.13288E+02	.4678	.4077	.3747	1.4771	1.6949	1.8440	-.1382E+02	-.1101E+02	-.1078E+02	-.1074E+02
172	.26044E+02	-.87026E+01	1.6576	1.8210	1.5446	.7855	.7151	.6430	-.2604E+02	-.5211E+02	-.2525E+02	-.2507E+02
173	.20312E+02	-.16361E+02	2.6932	1.6931	1.4069	.3771	.5998	.7218	-.2031E+02	-.2196E+02	-.1973E+02	-.1951E+02
174	.36804E+02	.74554E+01	.8303	.8727	.8137	2.2163	2.1086	2.2612	-.3680E+02	-.2913E+02	-.2915E+02	-.2913E+02
175	.19559E+02	-.10533E+02	.7546	.9866	.8664	1.2958	.9912	1.1287	-.1955E+02	-.1959E+02	-.1956E+02	-.1946E+02
176	.21811E+02	-.73165E+01	.7413	.9870	.8758	1.4711	1.1048	1.2452	-.2181E+02	-.2163E+02	-.2153E+02	-.2145E+02
177	.15319E+02	-.29205E+02	.8923	1.8286	1.4516	.8583	.4133	.5276	-.1531E+02	-.1306E+02	-.1145E+02	-.1108E+02
178	.28500E+02	-.38272E+01	1.5088	1.5549	1.3547	.9444	.9164	1.0518	-.2850E+02	-.2713E+02	-.2718E+02	-.2706E+02
179	.23611E+02	-.13805E+02	1.1938	2.0218	1.6745	.9896	.5839	.7049	-.2361E+02	-.2326E+02	-.2262E+02	-.2239E+02
180	.15522E+02	-.20766E+02	.6017	1.2182	1.0196	1.2897	.6370	.7611	-.1552E+02	-.1658E+02	-.1459E+02	-.1438E+02
181	.12184E+02	-.35610E+02	1.4527	1.5656	1.2306	.4193	.3891	.4950	-.1218E+02	-.5810E+01	-.6017E+01	-.5616E+01
182	.16013E+02	-.15419E+02	.9136	.8786	.7651	.8763	.9112	1.0465	-.1601E+02	-.1573E+02	-.1565E+02	-.1554E+02
183	.15465E+02	-.15928E+02	.5541	.8340	.7275	1.3954	.9271	1.0628	-.1546E+02	-.1534E+02	-.1494E+02	-.1483E+02
184	.25915E+02	-.46357E+01	.9561	1.2722	1.1201	1.3552	1.0185	1.1567	-.2591E+02	-.2521E+02	-.2515E+02	-.2505E+02
185	.15581E+02	-.11136E+02	.3154	.4785	.4386	2.4697	1.6278	1.7762	-.1558E+02	-.1404E+02	-.1338E+02	-.1333E+02
186	.24778E+02	-.74966E+01	.9016	1.4596	1.2615	1.3741	.8487	.9820	-.2477E+02	-.2508E+02	-.2441E+02	-.2428E+02
187	.28289E+02	-.61359E+01	1.4755	1.8488	1.5801	.9585	.7650	.8951	-.2828E+02	-.2688E+02	-.2700E+02	-.2685E+02
188	.18997E+02	-.10548E+02	.8993	.9042	.7985	1.0561	1.0504	1.1895	-.1899E+02	-.1887E+02	-.1888E+02	-.1879E+02
189	.17275E+02	-.12165E+02	.4850	.7978	.7066	1.7807	1.0826	1.2224	-.1727E+02	-.1781E+02	-.1692E+02	-.1683E+02
190	.15848E+02	-.19746E+02	.8546	1.1960	1.0056	.9272	.6625	.7879	-.1584E+02	-.1512E+02	-.1513E+02	-.1493E+02
191	.12966E+02	-.18418E+02	.3008	.6321	.5569	2.1549	1.0255	1.1640	-.1296E+02	-.1406E+02	-.1129E+02	-.1119E+02
192	.30167E+02	.45542E+01	.5080	.5530	.5231	2.9691	2.7273	2.8832	-.3016E+02	-.2349E+02	-.2350E+02	-.2349E+02
193	.23358E+02	-.97365E+01	.8434	1.4998	1.2843	1.3847	.7787	.9093	-.2335E+02	-.2453E+02	-.2319E+02	-.2304E+02
194	.22773E+02	-.66941E+01	.7107	1.0579	.9364	1.6020	1.0763	1.2159	-.2277E+02	-.2288E+02	-.2246E+02	-.2237E+02
195	.18509E+02	-.16912E+02	1.8098	1.4219	1.1930	.5113	.6508	.7757	-.1850E+02	-.1903E+02	-.1818E+02	-.1798E+02
196	.20911E+02	-.63337E+01	.7816	.7553	.6836	1.3375	1.3841	1.5294	-.2091E+02	-.2002E+02	-.1997E+02	-.1992E+02
197	.17036E+02	-.16218E+02	.5254	1.1082	.9476	1.6212	.7686	.8988	-.1703E+02	-.1943E+02	-.1686E+02	-.1671E+02
198	.16770E+02	-.18162E+02	1.6747	1.2276	1.0358	.5006	.6830	.8094	-.1677E+02	-.1752E+02	-.1634E+02	-.1616E+02
199	.29335E+02	-.15949E+01	.8015	1.3577	1.2022	1.8298	.0803	1.2200	-.2933E+02	-.2858E+02	-.2751E+02	-.2742E+02
200	.15832E+02	-.16779E+02	.6528	.9582	.8258	1.2125	.8260	.9585	-.1583E+02	-.1569E+02	-.1545E+02	-.1531E+02

MIN(LO) = -.7952E+01 MIN(L1)= -.1977E+01 MIN(L2)= -.8730E+00 MIN(L3)= -.6413E+00 0 0 0 200

Toelichting bij tabel III:

Er is 200 keer een steekproef ter grootte van $n = 80$ uit een gespecificeerde Erlang - verdeling getrokken.
Bij iedere getrokken steekproef ter grootte van $n = 80$ zijn β en δ geschat volgens de drie schattingsmethoden. Van de 200 schattingen van β en δ die men zo bij ieder methode verkrijgt kan men voor $\hat{\beta}$ en $\hat{\delta}$ afzonderlijk het gemiddelde berekenen en verder de variantie rond het geschatte gemiddelde.

Tabel III :

BETA = 1.0, DELTA = 1.0, STEEKPROEFGROOTTE = 80, AANTAL STEEKPROEVEN = 200.

DE STARTWAARDE VAN DE RANDOM-GENERATOR BY DEZE PARAMETERS IS .25975927

ER WORDEN TREKKINGEN GEDAAN UIT DE GAMMA-VERDELING MET BETA = 1.0 EN DELTA = 1.0

DE GESCHATTE NIEUWE WAARDEN VAN BETA EN DELTA ZYN

METHODE 1	BETA 1 =	.9804E+00	MET VARIANTIE	.5402E-01
METHODE 2	BETA 2 =	.1134E+01	MET VARIANTIE	.4850E-01
METHODE 3	BETA 3 =	.9820E+00	MET VARIANTIE	.3181E-01
METHODE 1	DELTA 1 =	.1053E+01	MET VARIANTIE	.4840E-01
METHODE 2	DELTA 2 =	.8941E+00	MET VARIANTIE	.2094E-01
METHODE 3	DELTA 3 =	.1028E+01	MET VARIANTIE	.2224E-01

BETA = 1.0, DELTA = 2.0, STEEKPROEFGROOTTE = 80, AANTAL STEEKPROEVEN = 200.

DE STARTWAARDE VAN DE RANDOM-GENERATOR BY DEZE PARAMETERS IS .78135927

ER WORDEN TREKKINGEN GEDAAN UIT DE GAMMA-VERDELING MET BETA = 1.0 EN DELTA = 2.0

DE GESCHATTE NIEUWE WAARDEN VAN BETA EN DELTA ZYN

METHODE 1	BETA 1 =	.9937E+00	MET VARIANTIE	.4566E-01
METHODE 2	BETA 2 =	.1057E+01	MET VARIANTIE	.3282E-01
METHODE 3	BETA 3 =	.9775E+00	MET VARIANTIE	.2504E-01
METHODE 1	DELTA 1 =	.2083E+01	MET VARIANTIE	.1612E+00
METHODE 2	DELTA 2 =	.1931E+01	MET VARIANTIE	.9309E-01
METHODE 3	DELTA 3 =	.2082E+01	MET VARIANTIE	.9457E-01

BETA = 1.0, DELTA = 3.0, STEEKPROEFGROOTTE = 80, AANTAL STEEKPROEVEN = 200.

DE STARWAARDE VAN DE RANDOM-GENERATOR BY DEZE PARAMETERS IS .16357949

ER WORDEN TREKKINGEN GEDAAN UIT DE GAMMA-VERDELING MET BETA = 1.0 EN DELTA = 3.0

DE GESCHATTE NIEUWE WAARDEN VAN BETA EN DELTA ZYN

METHODE 1	BETA 1 =	.9953E+00	MET VARIANTIE	.3313E-01
METHODE 2	BETA 2 =	.1033E+01	MET VARIANTIE	.2921E-01
METHODE 3	BETA 3 =	.9790E+00	MET VARIANTIE	.2408E-01
METHODE 1	DELTA 1 =	.3088E+01	MET VARIANTIE	.2858E+00
METHODE 2	DELTA 2 =	.2956E+01	MET VARIANTIE	.1990E+00
METHODE 3	DELTA 3 =	.3113E+01	MET VARIANTIE	.2004E+00

BETA = 1.0, DELTA = 4.0, STEEKPROEFGROOTTE = 80, AANTAL STEEKPROEVEN = 200.

DE STARTWAARDE VAN DE RANDOM-GENERATOR BY DEZE PARAMETERS IS . 42040167

ER WORDEN TREKKINGEN GEDAAN UIT DE GAMMA-VERDELING MET BETA = 1.0 EN DELTA = 4.0

DE GESCHATTE NIEUWE WAARDEN VAN BETA EN DELTA ZIJN

METHODE 1	BETA 1 =	.1011E+01	MET VARIANTIE	.3488E-01
METHODE 2	BETA 2 =	.1034E+01	MET VARIANTIE	.2486E-01
METHODE 3	BETA 3 =	.9927E+00	MET VARIANTIE	.2137E-01
METHODE 1	DELTA 1 =	.4062E+01	MET VARIANTIE	.4513E+00
METHODE 2	DELTA 2 =	.3941E+01	MET VARIANTIE	.3255E+00
METHODE 3	DELTA 3 =	.4101E+01	MET VARIANTIE	.3268E+00

BETA = 1.0, DELTA = 5.0, STEEKPROEFGROOTTE = 80, AANTAL STEEKPROEVEN = 200.

DE STARTWAARDE VAN DE RANDOM-GENERATOR BY DEZE PARAMETERS IS .16933207

ER WORDEN TREKKINGEN GEDAAN UIT DE GAMMA-VERDELING MET BETA = 1.0 EN DELTA = 5.0

DE GESCHATTE NIEUWE WAARDEN VAN BETA EN DELTA ZYN

METHODE 1	BETA 1 =	.9889E+00	MET	VARIANTIE	.3032E-01
METHODE 2	BETA 2 =	.1012E+01	MET	VARIANTIE	.2544E-01
METHODE 3	BETA 3 =	.9799E+00	MET	VARIANTIE	.2249E-01
METHODE 1	DELTA 1 =	.5170E+01	MET	VARIANTIE	.6582E+00
METHODE 2	DELTA 2 =	.5023E+01	MET	VARIANTIE	.5093E+00
METHODE 3	DELTA 3 =	.5184E+01	MET	VARIANTIE	.5105E+00

BETA = .2 , DELTA = 2.0, STEEKPROEFGROOTTE = 80, AANTAL STEEKPROEVEN = 200.

DE STARWAARDE VAN DE RANDOM-GENERATOR BY DEZE PARAMETERS IS .38039221

ER WORDEN TREKKINGEN GEDAAN UIT DE GAMMA-VERDELING MET BETA = .2 EN DELTA = 2.0

DE GESCHATTE NIEUWE WAARDEN VAN BETA EN DELTA ZYN

METHODE 1	BETA1=	.1982E+00	MET VARIANTIE	.2142E-02
METHODE 2	BETA2=	.2131E+00	MET VARIANTIE	.1595E-02
METHODE 3	BETA3=	.1969E+00	MET VARIANTIE	.1215E-02
METHODE 1	DELTA1=	2104E+01	MET VARIANTIE	.1873E+00
METHODE 2	DELTA2=	.1928E+01	MET VARIANTIE	.1009E+00
METHODE 3	DELTA3=	.2079E+01	MET VARIANTIE	.1116E+00

BETA = .50, DELTA = 2.00, STEEKPROEFGROOTTE = 80, AANTAL STEEKPROEVEN = 200.

DE STARTWAARDE VAN DE RANDOM-GENERATOR BY DEZE PARAMETERS IS .52339069

ER WORDEN TREKKINGEN GEDAAN UIT DE GAMMA-VERDELING MET BETA = .50 EN DELTA = 2.00

DE GESCHATTE NIEUWE WAARDEN VAN BETA EN DELTA ZYN

METHODE 1	BETA 1 = .4991E+00	MET VARIANTIE .9431E-02
METHODE 2	BETA 2 = .5370E+00	MET VARIANTIE .8617E-02
METHODE 3	BETA 3 = .4961E+00	MET VARIANTIE .6634E-02
METHODE 1	DELTA 1 = .2068E+01	MET VARIANTIE .1638E+00
METHODE 2	DELTA 2 = .1903E+01	MET VARIANTIE .9562E-01
METHODE 3	DELTA 3 = .2054E+01	MET VARIANTIE .9714E-01

BETA = .20, DELTA = 3.00, STEEKPROEFGROOTTE = 80, AANTAL STEEKPROEVEN = 200.

DE STARTWAARDE VAN DE RANDOM-GENERATOR BY DEZE PARAMETERS IS .83124741

ER WORDEN TREKKINGEN GEDAAN UIT DE GAMMA-VERDELING MET BETA = .20 EN DELTA = 3.00

DE GESCHATTE NIEUWE WAARDEN VAN BETA EN DELTA ZYN

METHODE 1	BETA 1 = .1978E+00	MET VARIANTIE .1262E-02
METHODE 2	BETA 2 = .2092E+00	MET VARIANTIE .1435E-02
METHODE 3	BETA 3 = .1981E+00	MET VARIANTIE 1181E-02
METHODE 1	DELTA 1 = .3104E+01	MET VARIANTIE .2514E+00
METHODE 2	DELTA 2 = .2935E+01	MET VARIANTIE .2188E+00
METHODE 3	DELTA 3 = .3092E+01	MET VARIANTIE .2204E+00

BETA = .33, DELTA = 3.00, STEEKPROEFGROOTTE = 80, AANTAL STEEKPROEVEN = 200.

DE STARTWAARDE VAN DE RANDOM-GENERATOR BY DEZE PARAMETERS IS .13958349

ER WORDEN TREKKINGEN GEDAAN UIT DE GAMMA-VERDELING MET BETA = .33 EN DELTA = 3.00

DE GESCHATTE NIEUWE WAARDEN VAN BETA EN DELTA ZYN

METHODE 1	BETA 1 = .3193E+00	MET VARIANTIE .3985E-02
METHODE 2	BETA 2 = .3364E+00	MET VARIANTIE .3567E-02
METHODE 3	BETA 3 = .3190E+00	MET VARIANTIE .2943E-02
METHODE 1	DELTA 1 = .3194E+01	MET VARIANTIE .3547E+00
METHODE 2	DELTA 2 = .3014E+01	MET VARIANTIE .2682E+00
METHODE 3	DELTA 3 = .3171E+01	MET VARIANTIE .2699E+00

PREVIOUS NUMBERS:

EIT 1	J. Kriens *)	laties bij accountantscontroles.
EIT 2	J. P. C. Kleynen *)	Een toepassing van „importance sampling".
EIT 3	S. R. Chowdhury and W. Vandaele *)	A bayesian analysis of heteroscedasticity in regression models.
EIT 4	Prof. drs. J. Kriens *)	De besliskunde en haar toepassingen.
EIT 5	Prof. dr. C. F. Scheffer *)	Winstkapitalisatie versus dividendkapitalisatie bij het waarderen van aandelen.
EIT 6	S. R. Chowdhury *)	A bayesian approach in multiple regression analysis with inequality constraints.
EIT 7	P. A. Verheyen *)	Investeren en onzekerheid.
EIT 8	R. M. J. Heuts en Walter H. Vandaele	Problemen rond niet-lineaire regressie.
EIT 9	S. R. Chowdhury *)	Bayesian analysis in linear regression with different priors.
EIT 10	A. J. van Reeken	The effect of truncation in statistical computation.
EIT 11	W. H. Vandaele and S. R. Chowdhury *)	A revised method of scoring.
EIT 12	J. de Blok	Reclame-uitgaven in Nederland.
EIT 13	Walter H. Vandaele	Mødscø, a computer programm for the revised method of scoring.
EIT 14	J. Plasmans *)	Alternative production models. (Some empirical relevance for postwar Belgian Economy)
EIT 15	D. Neeleman	Multiple regression and serially correlated errors.
EIT 16	H. N. Weddepohl	Vector representation of majority voting.
EIT 17	Walter H. Vandaele	Zellner's seemingly unrelated regression equation estimators: a survey.
EIT 18	J. Plasmans *)	The general linear seemingly unrelated regression problem. I. Models and Inference.
EIT 19	J. Plasmans and R. Van Straelen	The general linear seemingly unrelated regression problem. II. Feasible statistical estimation and an application.
EIT 20	Pieter H. M. Ruys	A procedure for an economy with collective goods only.
EIT 21	D. Neeleman *)	An alternative derivation of the k-class estimators.
EIT 22	R. M. J. Heuts	Parameter estimation in the exponential distribution, confidence intervals and a monte carlo study for some goodness of fit tests.
EIT 23	D. Neeleman	The classical multivariate regression model with singular covariance matrix.
EIT 24	R. Stobberingh	The derivation of the optimal Karhunen-Loève coordinate functions.
EIT 25	Th. van de Klundert	Produktie, kapitaal en interest
EIT 26	Th. van de Klundert	Labour values and international trade; a reformulation of the theory of A. Emmanuel.

*) not available

EIT 1971